

Lösen von umfangreicheren Linearen Gleichungen

Wolfgang Kippels

20. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Grundsätzliche Vorgehensweise	4
3	Übungsaufgaben:	5
3.1	Aufgabe 1:	5
3.2	Aufgabe 2:	5
3.3	Aufgabe 3:	5
3.4	Aufgabe 4:	5
3.5	Aufgabe 5:	5
3.6	Aufgabe 6:	5
3.7	Aufgabe 7:	5
3.8	Aufgabe 8:	5
3.9	Aufgabe 9:	5
3.10	Aufgabe 10:	5
4	Hier die Ergebnisse:	6
4.1	Aufgabe 1:	6
4.2	Aufgabe 2:	6
4.3	Aufgabe 3:	6
4.4	Aufgabe 4:	6
4.5	Aufgabe 5:	6
4.6	Aufgabe 6:	6
4.7	Aufgabe 7:	6
4.8	Aufgabe 8:	6
4.9	Aufgabe 9:	6
4.10	Aufgabe 10:	6

5	Komplette Lösungen mit Lösungsweg:	7
5.1	Aufgabe 1:	7
5.2	Aufgabe 2:	7
5.3	Aufgabe 3:	7
5.4	Aufgabe 4:	7
5.5	Aufgabe 5:	7
5.6	Aufgabe 6:	8
5.7	Aufgabe 7:	8
5.8	Aufgabe 8:	8
5.9	Aufgabe 9:	9
5.10	Aufgabe 10:	9

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Grundsätzliche Vorgehensweise

An einem Beispiel wollen wir das Lösungsprinzip umfangreicherer Linearer Gleichungen darstellen. Wie man einfachere Lineare Gleichungen löst, ist hier nachzulesen.

<https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gleich00.pdf>

Hier ist das Beispiel, anhand dessen wir eine systematische Lösungsstrategie kennenlernen wollen.

$$6x + 5 - (2x - 3) - 2 = 4 \cdot (2x - 2) + x$$

Die erste Frage, die man sich immer stellen muss:

Kann man vor dem Umstellen der Gleichung etwas zusammenfassen?

Zur der Beantwortung dieser Frage schaut man immer nach zweierlei in dieser Reihenfolge:

1. Gibt es Klammern, die aufgelöst werden können?
2. Gibt es gleichartige Terme, die zusammengefasst werden können?

Es gibt hier beides, Klammern und gleichartige Terme. Klammern sind auf beiden Seiten je eine, und es kann auf der linken Seite die $+5$ und die -2 zusammengefasst werden. Am besten löst man erst die Klammern auf. Dabei immer beachten:

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen,

dann kehren sich alle Vorzeichen in der aufgelösten Klammer um!

$$\begin{aligned} 6x + 5 - (2x - 3) - 2 &= 4 \cdot (2x - 2) + x \\ 6x + 5 - 2x + 3 - 2 &= 8x - 8 + x \end{aligned}$$

Nun kann man gleichartige Terme zusammenfassen wie $+6x$ und $-2x$ oder $+5$, $+3$ und -2 auf der linken Seite sowie $+8x$ und $+x$ auf der rechten Seite. Nach dem Zusammenfassen erhält man:

$$4x + 6 = 9x - 8$$

Danach gehts wie gewohnt weiter:

$$\begin{aligned} 4x + 6 &= 9x - 8 & | -9x - 6 \\ -5x &= -14 & | : (-5) \\ x &= \frac{14}{5} = 2,8 \end{aligned}$$

3 Übungsaufgaben:

3.1 Aufgabe 1:

$$4x - (x + 6) = 5 \cdot (x - 3)$$

3.2 Aufgabe 2:

$$3x - (x + 8) = 4(x - 3)$$

3.3 Aufgabe 3:

$$3(2x - 4) + 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 2)$$

3.4 Aufgabe 4:

$$4 \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 11)$$

3.5 Aufgabe 5:

$$(5x - 5) \cdot (2x - 2) = (5x + 4) \cdot (2x - 3) - 11x$$

3.6 Aufgabe 6:

$$(x - 1) \cdot (10x - 10) = (5x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) - 11x$$

3.7 Aufgabe 7:

$$(2x - 4)(3x + 5) - (5x - 5)(x - 1) = (x - 2)(x + 3) - 13$$

3.8 Aufgabe 8:

$$(3x + 5)(2x - 4) - (x - 1)(5x - 5) + 13 = (x + 3)(x - 2)$$

3.9 Aufgabe 9:

$$3x - \left(4x - \left(5 - (x + 4) \right) \right) - 5 = -12$$

3.10 Aufgabe 10:

$$5x - \left(6x - \left(4 - (x + 3) \right) \right) - 3 = -10$$

4 Hier die Ergebnisse:

4.1 Aufgabe 1:

$$x = \frac{9}{2} = 4,5$$

4.2 Aufgabe 2:

$$x = 2$$

4.3 Aufgabe 3:

$$x = \frac{26}{10} = 2,6$$

4.4 Aufgabe 4:

$$x = 2$$

4.5 Aufgabe 5:

$$x = 11$$

4.6 Aufgabe 6:

$$x = 11$$

4.7 Aufgabe 7:

$$x = \frac{6}{7}$$

4.8 Aufgabe 8:

$$x = \frac{6}{7}$$

4.9 Aufgabe 9:

$$x = 4$$

4.10 Aufgabe 10:

$$x = 4$$

5 Komplette Lösungen mit Lösungsweg:

5.1 Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}4x - (x + 6) &= 5 \cdot (x - 3) && | \text{ Klammern auflösen} \\4x - x - 6 &= 5x - 15 && | \text{ links zusammenfassen} \\3x - 6 &= 5x - 15 && | - 5x + 6 \\-2x &= -9 && | : (-2) \\x &= \frac{9}{2} = 4,5\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}3x - (x + 8) &= 4(x - 3) && | \text{ Klammern auflösen} \\3x - x - 8 &= 4x - 12 && | \text{ links zusammenfassen} \\2x - 8 &= 4x - 12 && | - 4x + 8 \\-2x &= -4 && | : (-2) \\x &= 2\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}3(2x - 4) + 2 &= 12 - 2 \cdot (2x - 2) && | \text{ Klammern auflösen} \\6x - 12 + 2 &= 12 - 4x + 4 && | \text{ rechts und links zusammenfassen} \\6x - 10 &= 16 - 4x && | + 10 + 4x \\10x &= 26 && | : 10 \\x &= \frac{26}{10} \\x &= 2,6\end{aligned}$$

5.4 Aufgabe 4:

$$4 \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 = 12 - 2 \cdot (2x - 11) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

Aufgepasst! Es spielt keine Rolle, ob man den Malpunkt setzt oder weglässt, beides bedeutet das Gleiche. Also ist: $2 \cdot x = 2x$ oder: $2 \cdot (2x - 11) = 2(2x - 11)$

$$\begin{aligned}8x + 12 - 2 &= 12 - 4x + 22 && | \text{ auf beiden Seiten zusammenfassen} \\8x + 10 &= 34 - 4x && | - 10 + 4x \\12x &= 24 && | : 12 \\x &= 2\end{aligned}$$

5.5 Aufgabe 5:

$$(5x - 5) \cdot (2x - 2) = (5x + 4) \cdot (2x - 3) - 11x \quad | \text{ alle Klammern auflösen}$$

Auch hier gilt wieder: Es ist gleichgültig, ob ein Malpunkt gesetzt ist, oder nicht. Also lassen wir ihn einfach weg.

Werden zwei Summen in Klammern miteinander multipliziert, so wird jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert, etwa so:¹

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Damit ergibt sich aufgelöst:

$$\begin{array}{rcl} 10x^2 - 10x - 10x + 10 & = & 10x^2 - 15x + 8x - 12 - 11x & | \text{ zusammenfassen} \\ 10x^2 - 20x + 10 & = & 10x^2 - 18x - 12 & | - 10x^2 \\ -20x + 10 & = & -18x - 12 & | + 18x - 10 \\ -2x & = & -22 & | : (-2) \\ x & = & 11 & \end{array}$$

5.6 Aufgabe 6:

$$\begin{array}{rcl} (x - 1) \cdot (10x - 10) & = & (5x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) - 11x & | \text{ Klammern ausmultiplizieren} \\ 10x^2 - 10x - 10x + 10 & = & 10x^2 - 15x + 8x - 12 - 11x & | \text{ zusammenfassen} \\ 10x^2 - 20x + 10 & = & 10x^2 - 18x - 12 & | - 10x^2 \\ -20x + 10 & = & -18x - 12 & | + 18x - 10 \\ -2x & = & -22 & | : (-2) \\ x & = & 11 & \end{array}$$

5.7 Aufgabe 7:

$$\begin{array}{rcl} (2x - 4)(3x + 5) - (5x - 5)(x - 1) & = & (x - 2)(x + 3) - 13 & | \text{ Kl. ausmul.} \\ 6x^2 + 10x - 12x - 20 - (5x^2 - 5x - 5x + 5) & = & x^2 + 3x - 2x - 6 - 13 & | \text{ Kl. aufl.} \\ 6x^2 + 10x - 12x - 20 - 5x^2 + 5x + 5x - 5 & = & x^2 + 3x - 2x - 6 - 13 & | \text{ zusf.} \\ x^2 + 8x - 25 & = & x^2 + x - 19 & | - x^2 \\ 8x - 25 & = & x - 19 & | - x + 25 \\ 7x & = & 6 & | : 7 \\ x & = & \frac{6}{7} & \end{array}$$

5.8 Aufgabe 8:

$$\begin{array}{rcl} (3x + 5)(2x - 4) - (x - 1)(5x - 5) + 13 & = & (x + 3)(x - 2) & | \text{ Kl. ausm.} \\ 6x^2 - 12x + 10x - 20 - (5x^2 - 5x - 5x + 5) + 13 & = & x^2 - 2x + 3x - 6 & | \text{ Kl. aufl.} \\ 6x^2 - 12x + 10x - 20 - 5x^2 + 5x + 5x - 5 + 13 & = & x^2 - 2x + 3x - 6 & | \text{ zusf.} \\ x^2 + 8x - 12 & = & x^2 + x - 6 & | - x^2 \\ 8x - 12 & = & x - 6 & | - x + 12 \\ 7x & = & 6 & | : 7 \\ x & = & \frac{6}{7} & \end{array}$$

¹Einzelheiten dazu siehe hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/klammer.pdf>

5.9 Aufgabe 9:

$$3x - \left(4x - \left(5 - (x + 4) \right) \right) - 5 = -12$$

Bei einer solchen geschachtelten Klammer fängt man am besten an, die innersten Klammern zuerst aufzulösen, im nächsten Schritt wieder die innersten und so weiter:

$$\begin{aligned} 3x - \left(4x - (5 - x - 4) \right) - 5 &= -12 && | \text{innerste Klammer auflösen} \\ 3x - (4x - 5 + x + 4) - 5 &= -12 && | \text{Klammer auflösen} \\ 3x - 4x + 5 - x - 4 - 5 &= -12 && | \text{zusammenfassen} \\ -2x - 4 &= -12 && | + 4 \\ -2x &= -8 && | : (-2) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

5.10 Aufgabe 10:

$$\begin{aligned} 5x - \left(6x - \left(4 - (x + 3) \right) \right) - 3 &= -10 && | \text{innerste Klammer auflösen} \\ 5x - \left(6x - (4 - x - 3) \right) - 3 &= -10 && | \text{innerste Klammer auflösen} \\ 5x - (6x - 4 + x + 3) - 3 &= -10 && | \text{Klammer auflösen} \\ 5x - 6x + 4 - x - 3 - 3 &= -10 && | \text{zusammenfassen} \\ -2x - 2 &= -10 && | + 2 \\ -2x &= -8 && | : (-2) \\ x &= 4 \end{aligned}$$